

XVIII KOMANDINĖ JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADA
PROF. V. LIUTIKO PRIZUI LAIMĖTI

VšĮ Pranciškonų gimnazija,
Kretinga, 2019-10-29

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai

1. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $\frac{n^2+n+6}{n+1}$ įgyja sveikąsias reikšmes.

2. Klasėje yra 21 mokinytis, lankantis informatikos arba matematikos būrelius. Abu būrelius lanko 5 mokiniai, o matematikos būrelį lanko 14 mokinių. Kiek mokinių lanko informatikos būrelį?

3. Raskite skaičiaus $10^{2019} + 29^{2019}$ paskutinį skaitmenį.

4. Suprastinkite reiškinį

$$\left(\left(\frac{y}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - xy} \right) \cdot \frac{x^4}{x^2y^2 - y^4}.$$

5. Dviejų skaičių suma lygi 15, o jų aritmetinis vidurkis 25% didesnis už geometrinį vidurkį. Raskite tuos skaičius.

6. Funkcija f tokia, kad su bet kokiais teigiamomis x ir y reikšmėmis yra teisinga lygybė $f(xy) = f(x) - f(y) + 1$. Raskite $f(2019)$, jei $f\left(\frac{1}{2019}\right) = 1$.

7. Pavaroje yra sujungti du skirtingo dydžio krumpliaračiai. Pirmasis ratas turi 12 dantų, o antrasis – 54. Kiek kartų turės apsukti kiekvienas ratas, kol abu ratai grįš į pradinę padėtį?

8. Kaip nubrėžti trikampį, kai duotos kraštinės a , b ir žinoma, kad kampas A trigubai didesnis už kampą B ?

9. Iš miesto A į miestą B, esantį už 120 km, mopedu išvyko kurjeris. Po 1 valandos iš miesto A motociklu išvažiavo antras kurjeris, kuris, pasivijęs pirmąjį ir perdavęs jam siuntinį, nedelsdamas tuo pačiu greičiu pajudėjo atgal ir grįžo į miestą A tuo pačiu momentu, kai pirmasis kurjeris pasiekė miestą B. Koks pirmojo kurjerio greitis, jeigu antrojo greitis – 50 km/h?

10. Iš mokytojų kambario dingo vienos mokytojos mobilusis telefonas. Į mokytojų kambarį, nepriklausomai vienas nuo kito, buvo užėję trys mokiniai: pirmūnas, didžiausias mokyklos neklaužada ir niekuo neišsiskiriantis mokinytis. Buvo aišku, kad telefoną paėmė kuris nors vienas iš jų (Vidmantas, Skirmantas arba Regimantas), bet nė vienas iš jų neprisipažino.

Vidmantas: Skirmantas to nepadare. Tai padarė Regimantas.

Skirmantas: Aš to nepadariau. Vidmantas to nepadare.

Regimantas: Aš to nepadariau. Tai padarė Skirmantas.

Vėliau paaiškėjo, kad pirmūno abu atsakymai teisingi, neklaužada abu kartus sumelavo, o niekuo neišsiskiriantis mokinytis vieną kartą sumelavo, o kitą kartą pasakė tiesą.

Nustatykite pirmūno, neklaužados ir niekuo neišsiskiriančio mokinio vardus ir pasakykite, kuris iš jų paėmė mokytojos mobiliąjį telefoną.

Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti
2019 m. spalio 29 d.
III-IV klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2. \end{cases}$$

2. Iki rekonstrukcijos gamykloje veikė tam tikras skaičius vienodų konvejerių, kurių bendra mėnesinė produkcija buvo 15000 detalių. Po rekonstrukcijos, sumontavus dar penkis konvejerius ir padidinus visų konvejerių pajėgumą, mėnesinė produkcija padidėjo iki 33792 detalių. Kiek konvejerių buvo iš pradžių?

3. Raskite trapezijos $ABCD$ kampus, jei AD - pagrindas, be to $AB = BC$, $AC = CD$ ir $BC + CD = AD$.

4. Su kuriomis x ir y reikšmėmis teisinga lygybė

$$x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}?$$

5. Kvadrato 8×8 pažymėti 4 taškai. Ar tarp šių taškų yra bent 2 taškai, tarp kurių atstumas neviršija $\sqrt{65}$.

6. Natūralieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $x^2 - 3x = 25y^2 - 15y$. Kiek kartų x didesnis už y .

7. Išspręskite lygtį $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$.

8. Pirmasis sekos narys yra 7. Kiekvienas sekantis sekos narys yra prieš jį esančio sekos nario kvadrato skaitmenų suma padidinta vienetu. Raskite 2019-tąją sekos narį.

9. Kam lygi suma $\frac{1}{2^{-100} + 1} + \frac{1}{2^{-99} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99} + 1} + \frac{1}{2^{100} + 1}$?

10. Onutė sugalvojo natūralųjį skaičių m . Tuomet Petriukas prie vieno iš Onutės sugalvotojo skaičiaus daliklio p pridėjo 5 ir gautąją sumą padaugino iš 6. Iš skaičiaus m atėmęs gautąją sandaugą, Petriukas gavo 7. Kokį skaičių sugalvojo Onutė?